



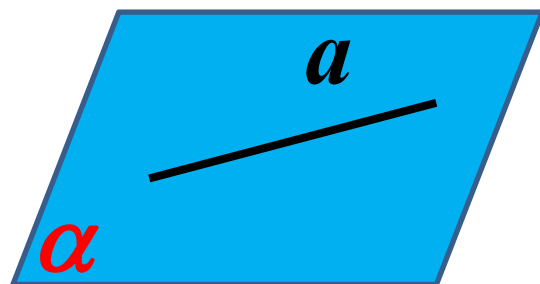
第八章 立体几何初步

8.6.2 直线与平面垂直

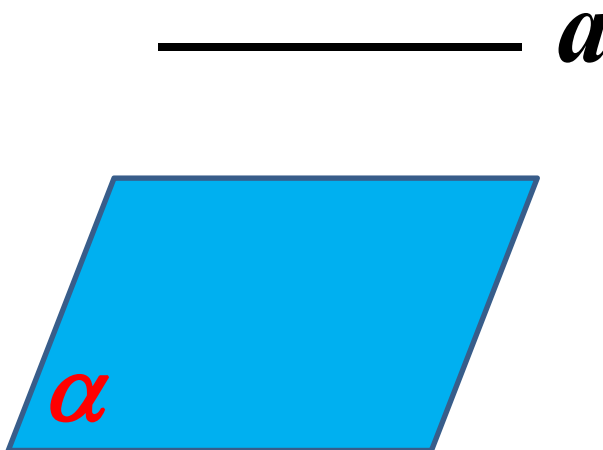
第1课时 直线与平面垂直的判定

主讲人：王婷

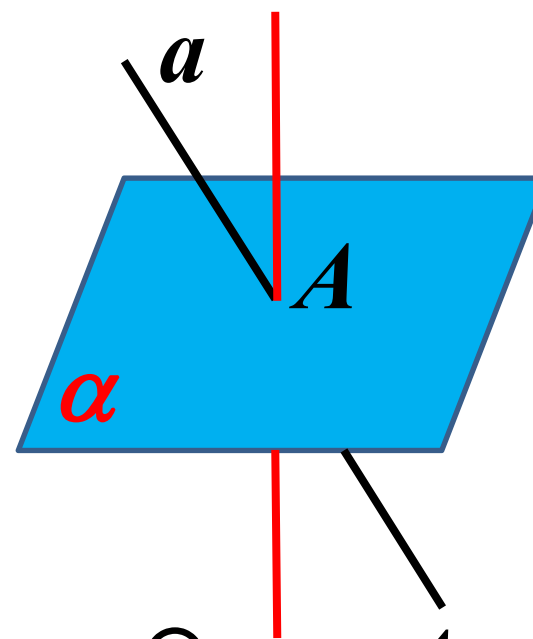
空间中直线与平面有几种位置关系?



$a \subset \alpha$
(直线在平面上)

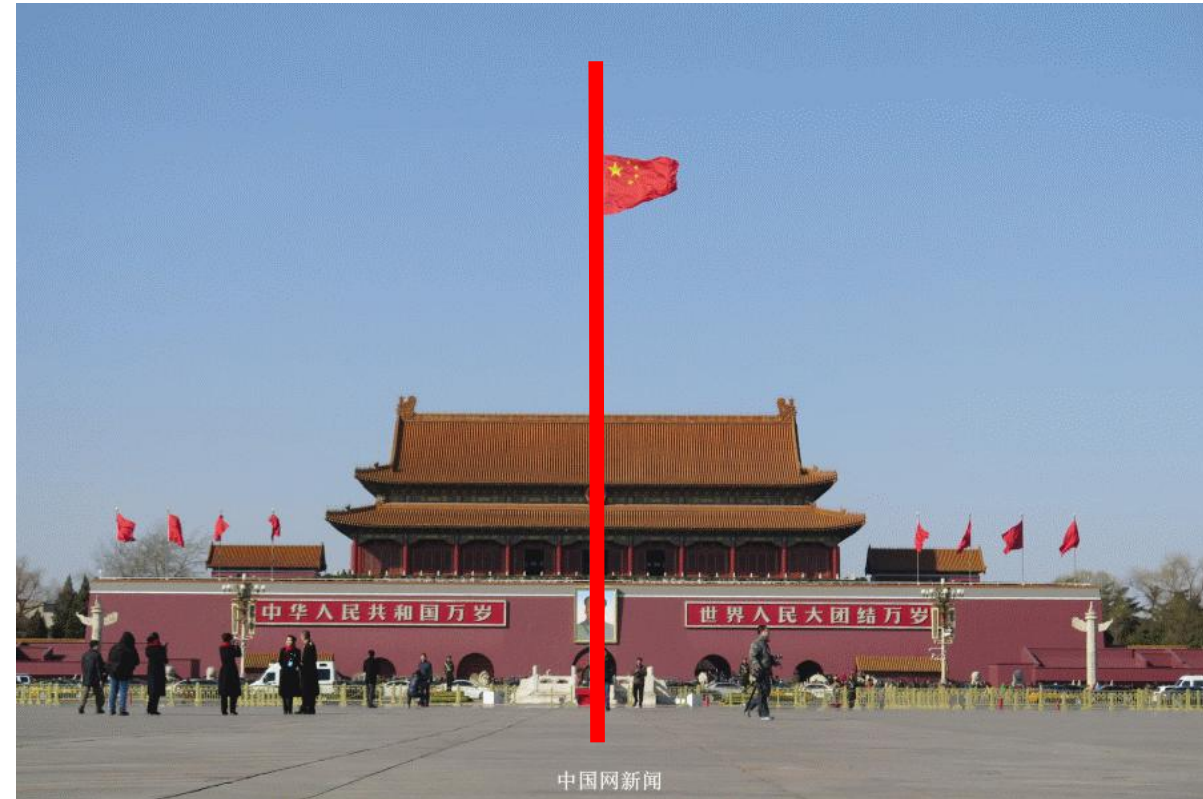


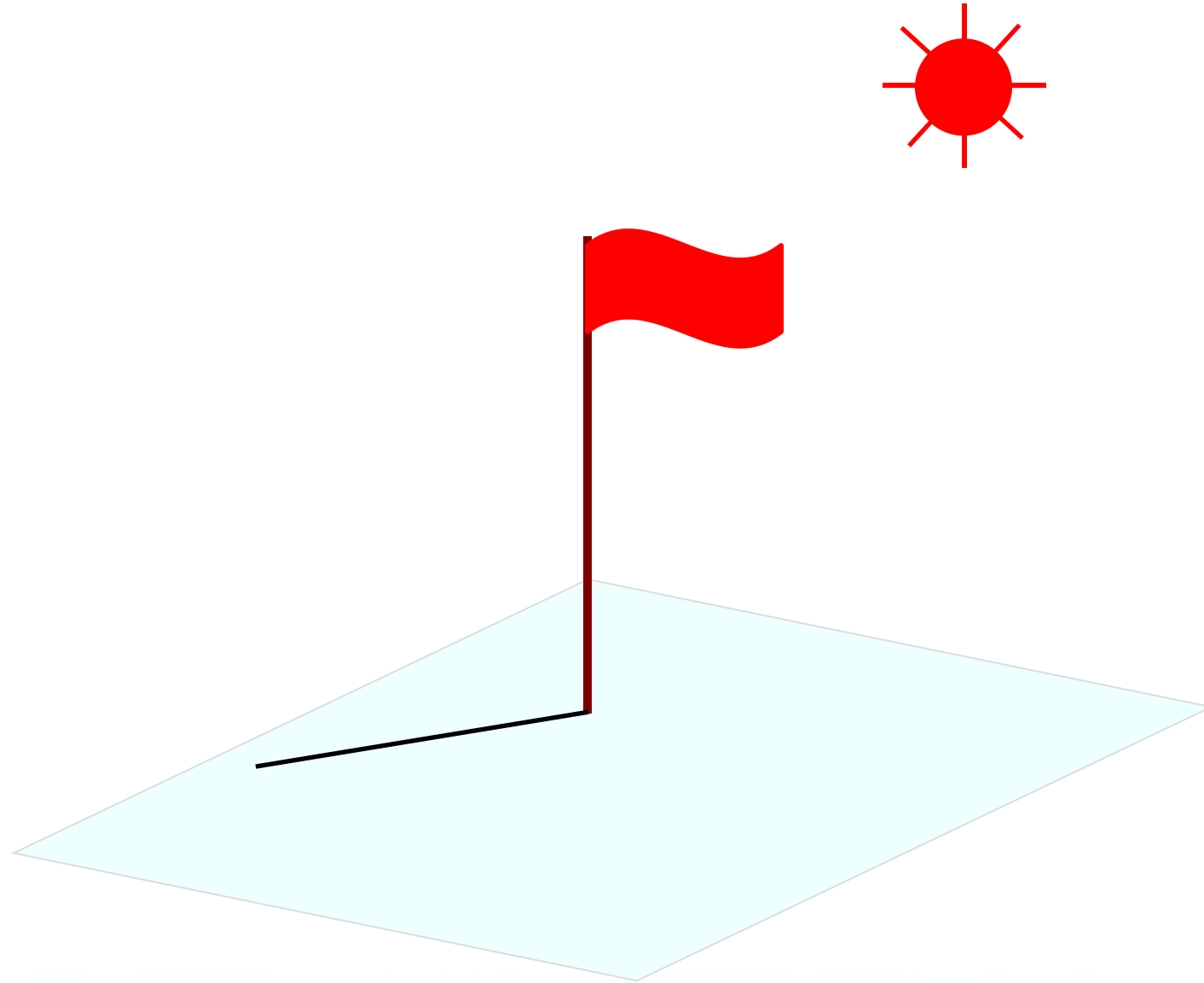
$a \parallel \alpha$
(平行)

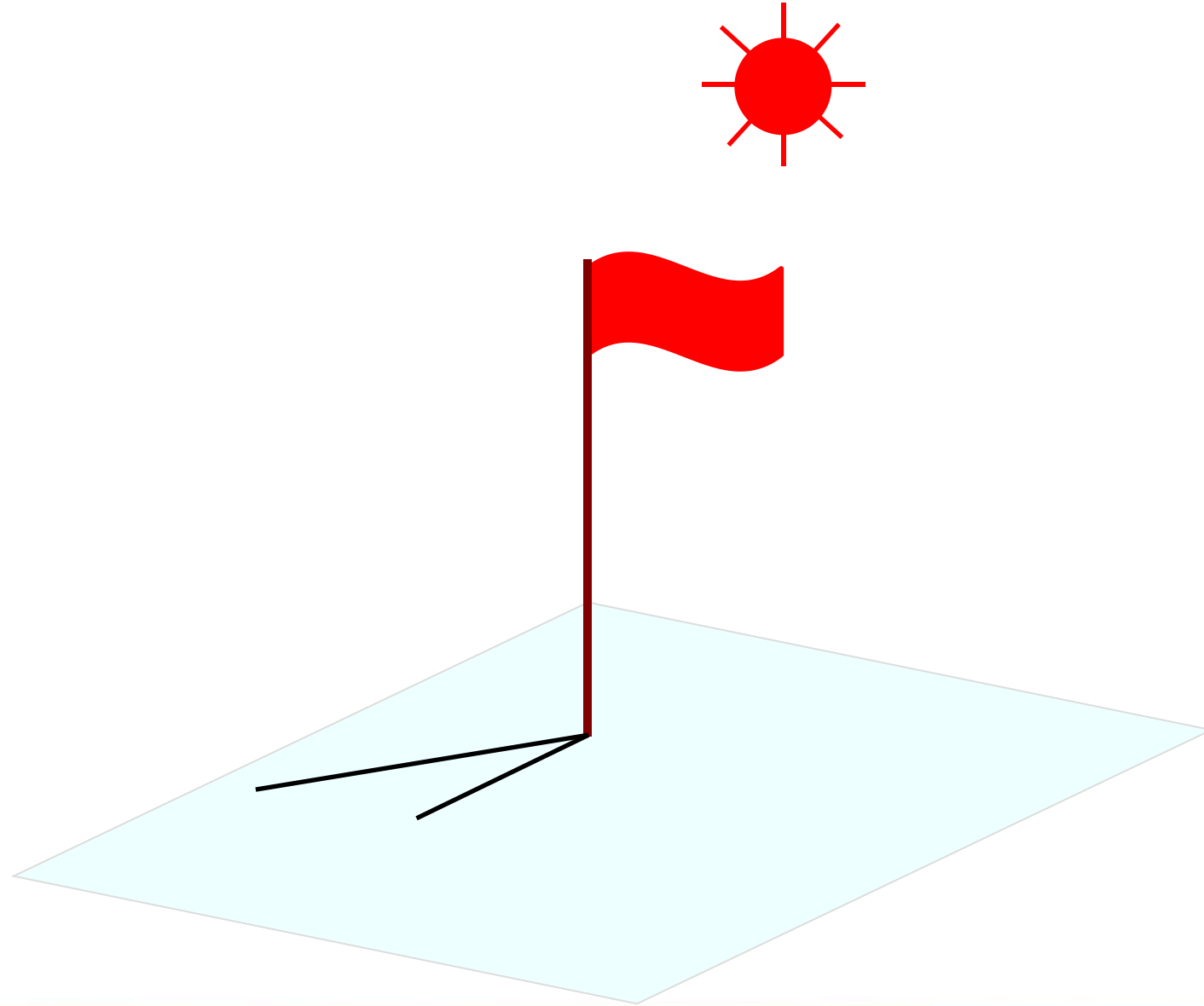


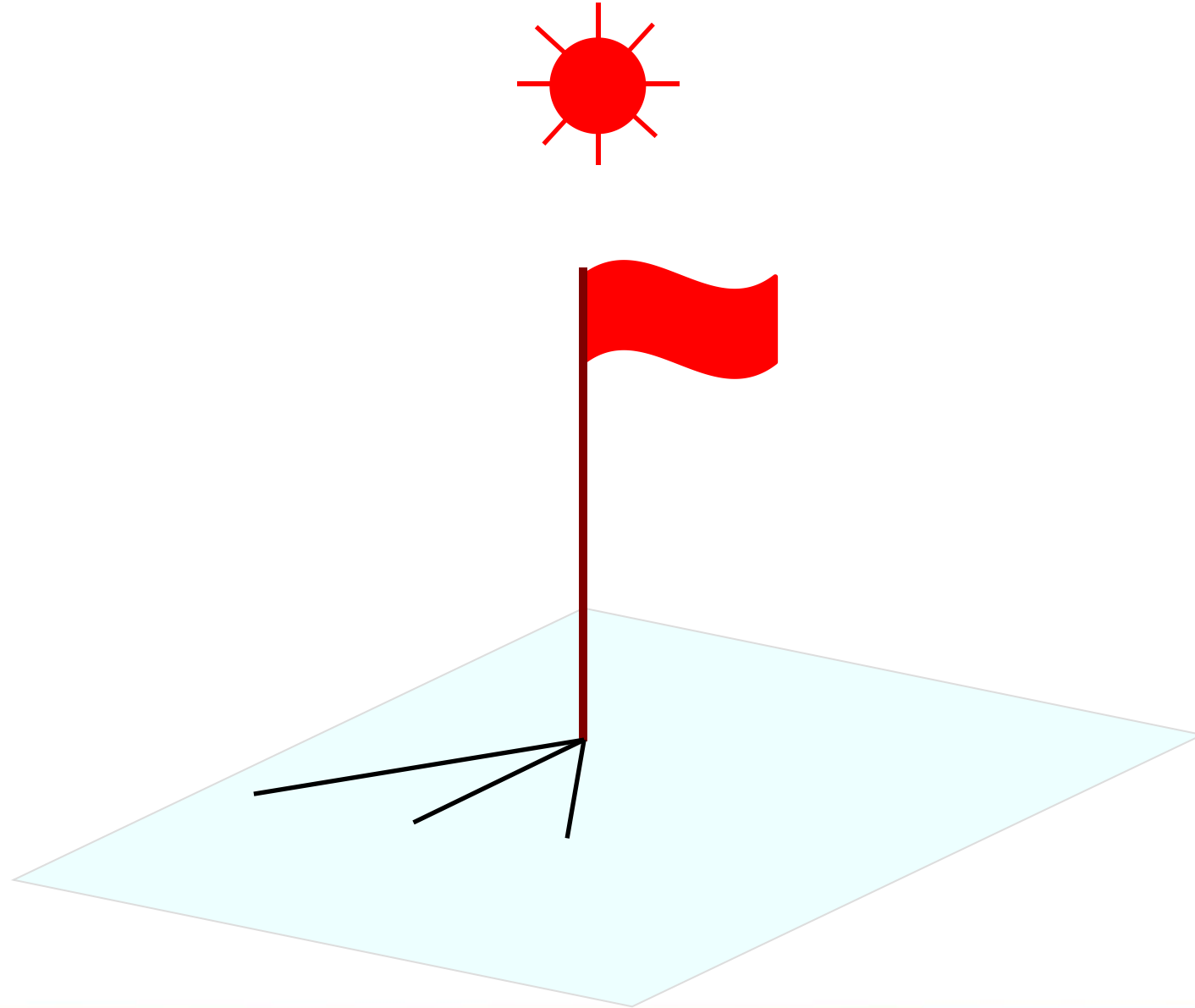
$a \cap \alpha = A$
(相交)

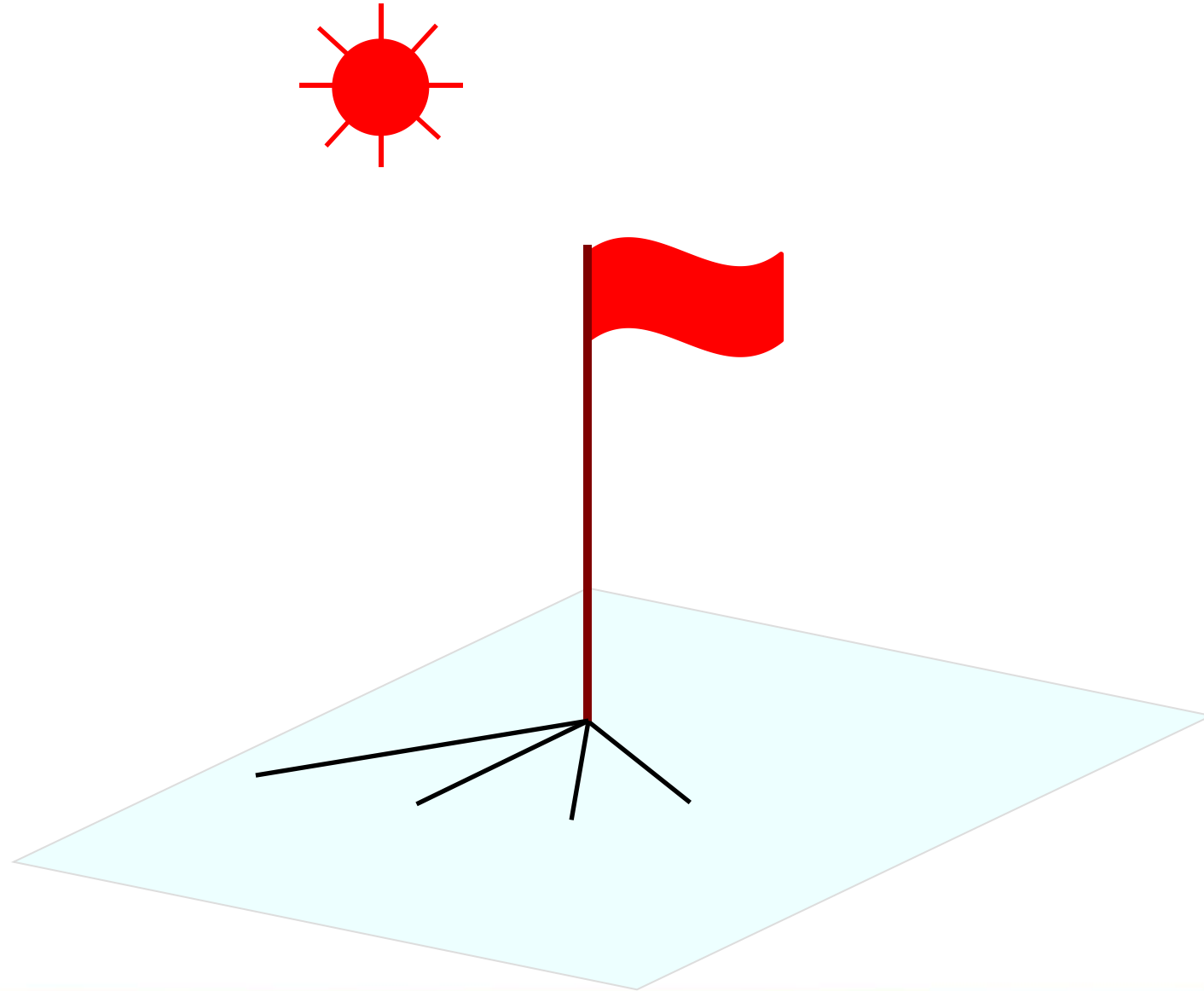
生活中有很多直线与平面垂直的实例

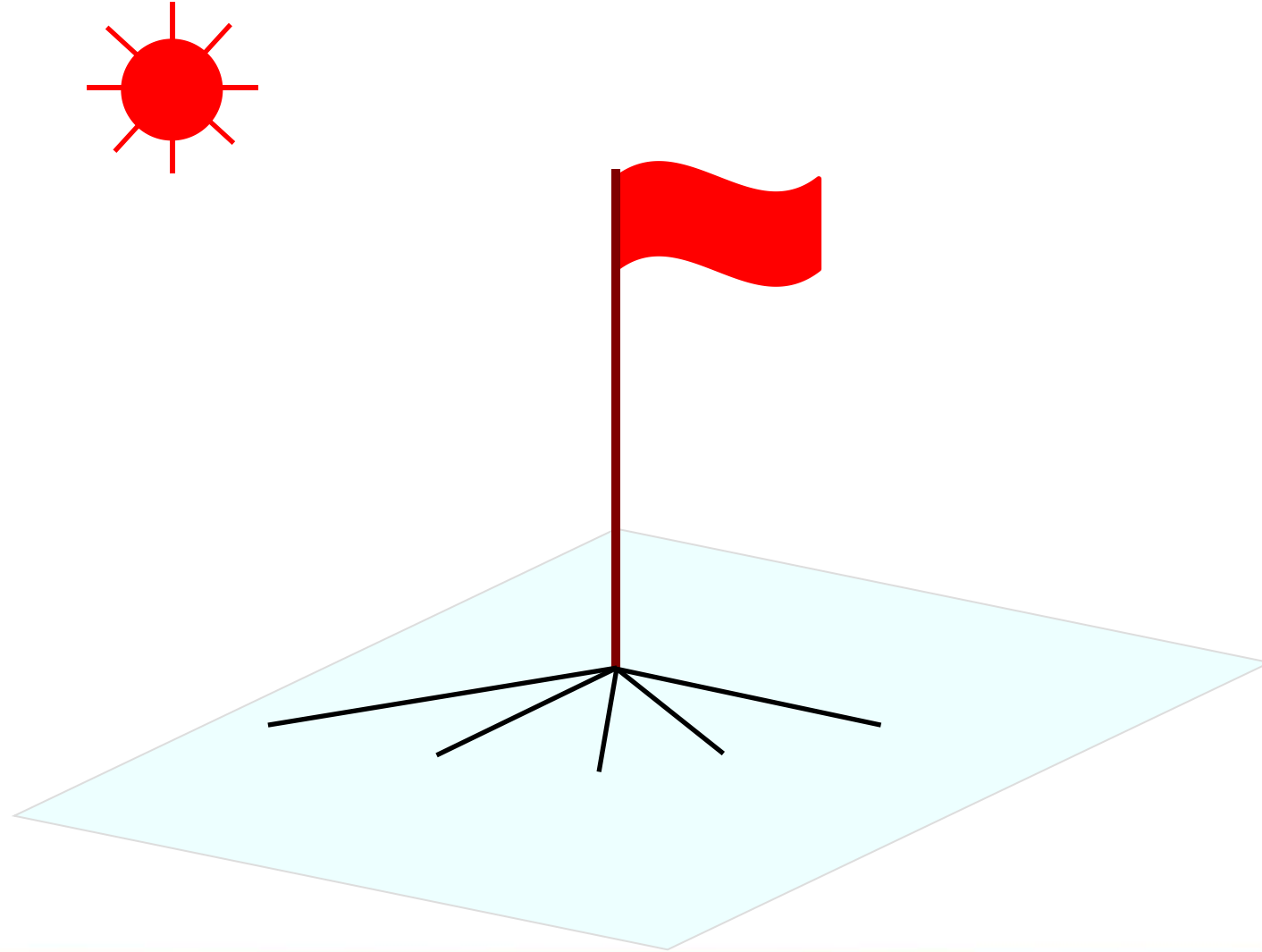




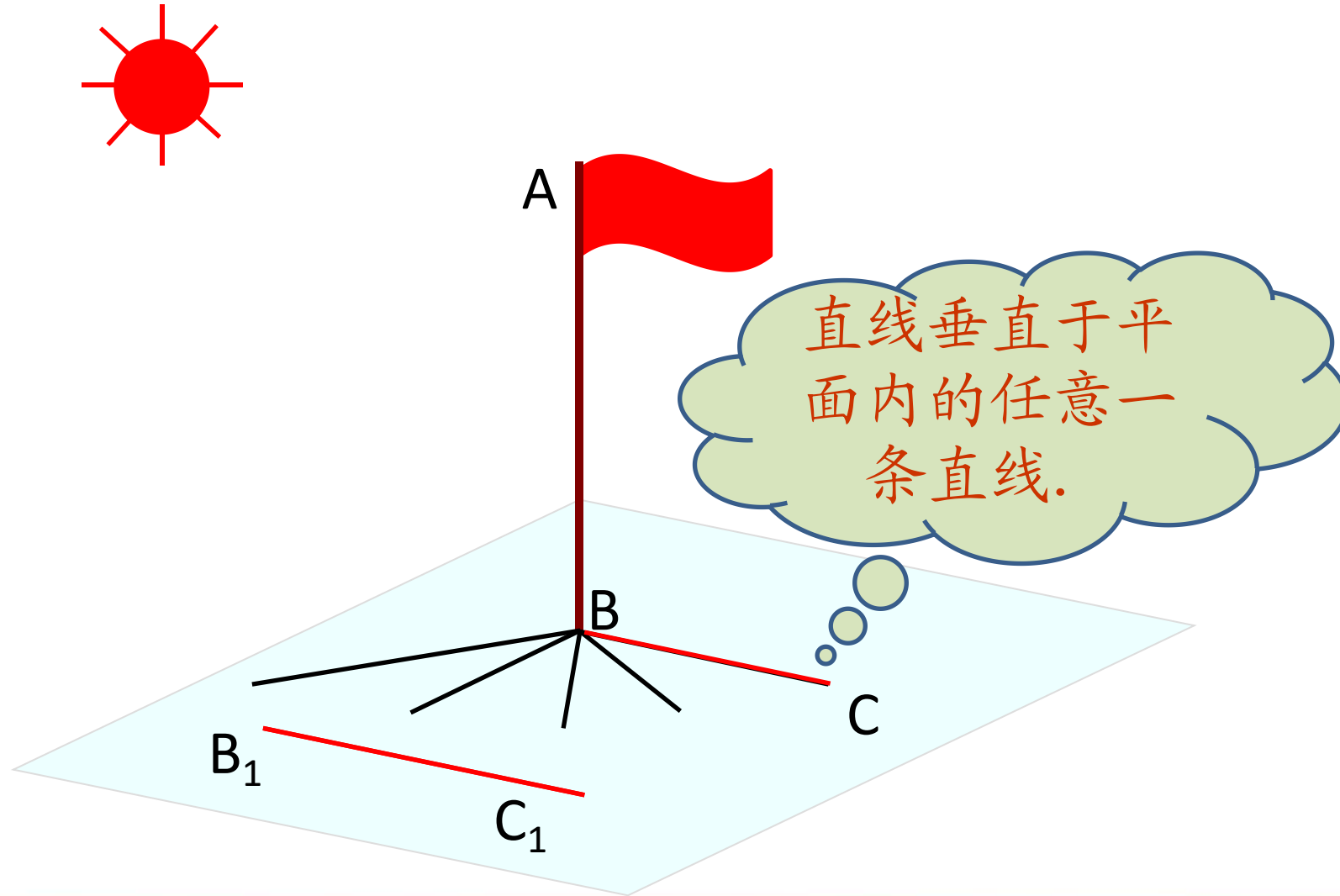








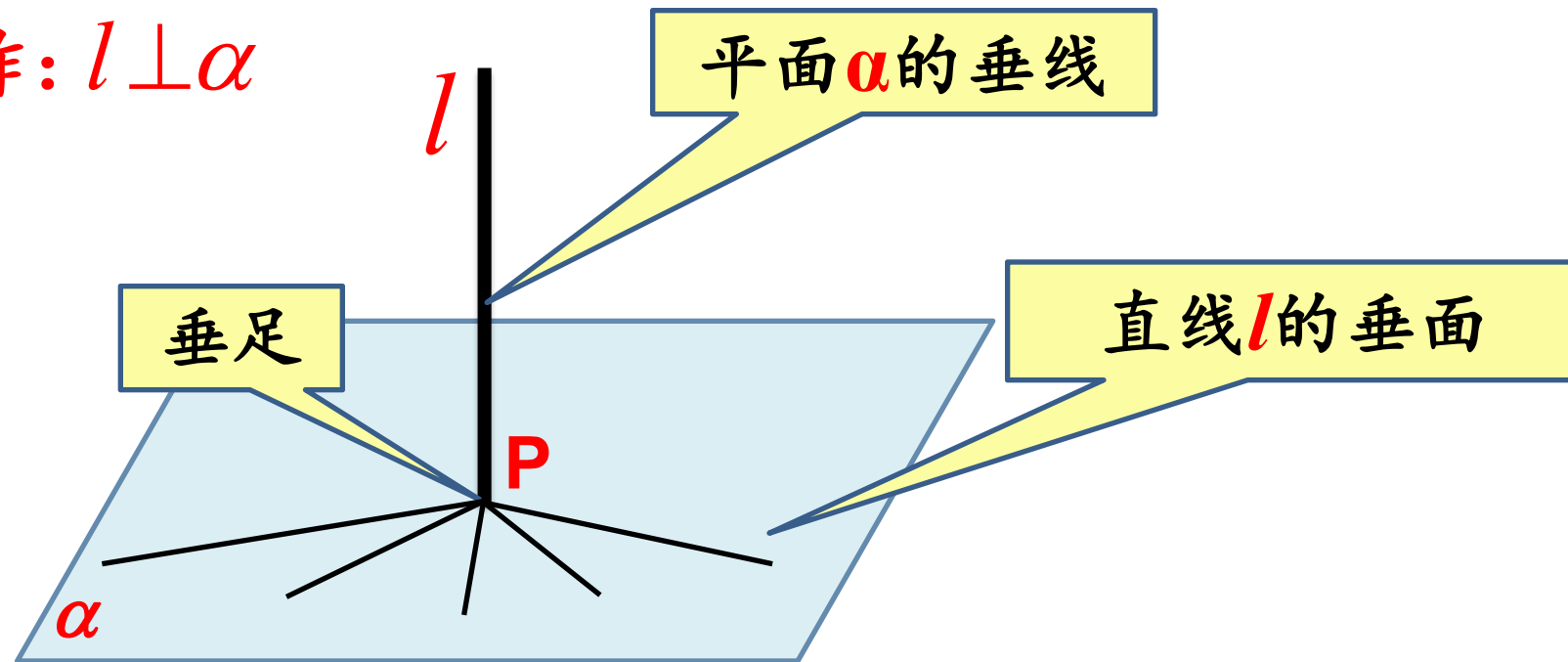
请你给直线与平面垂直下个定义吧！



1. 线面垂直

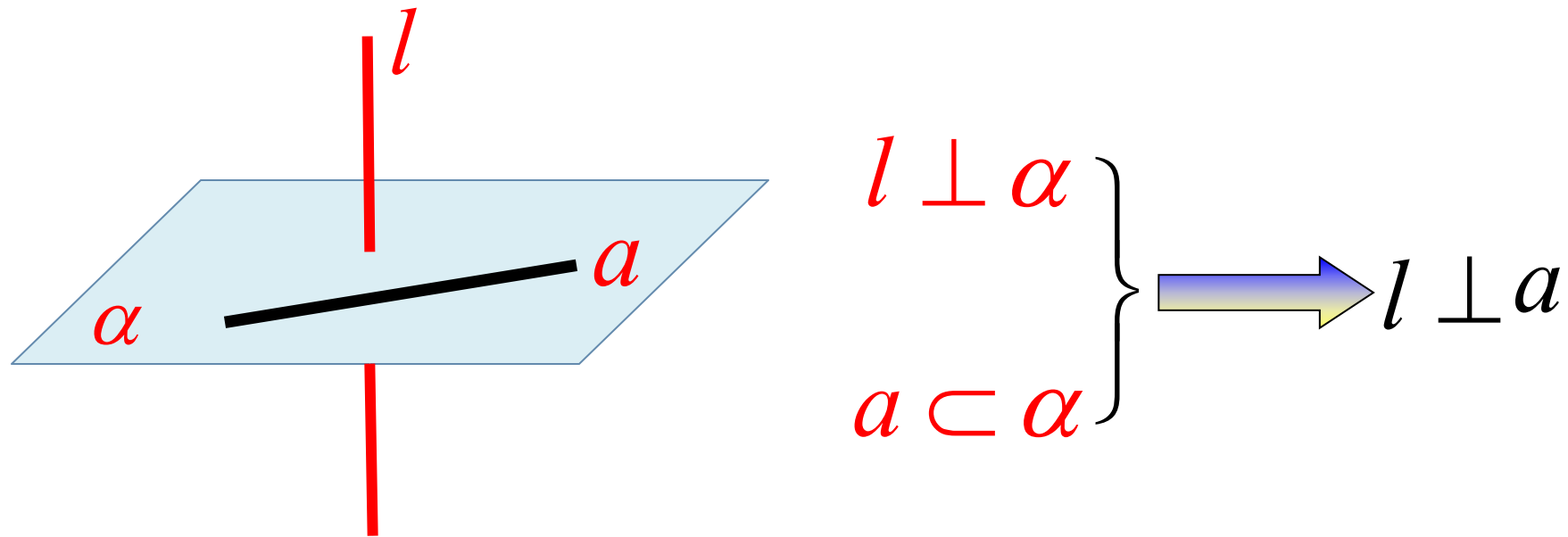
定义：如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直。

记作： $l \perp \alpha$



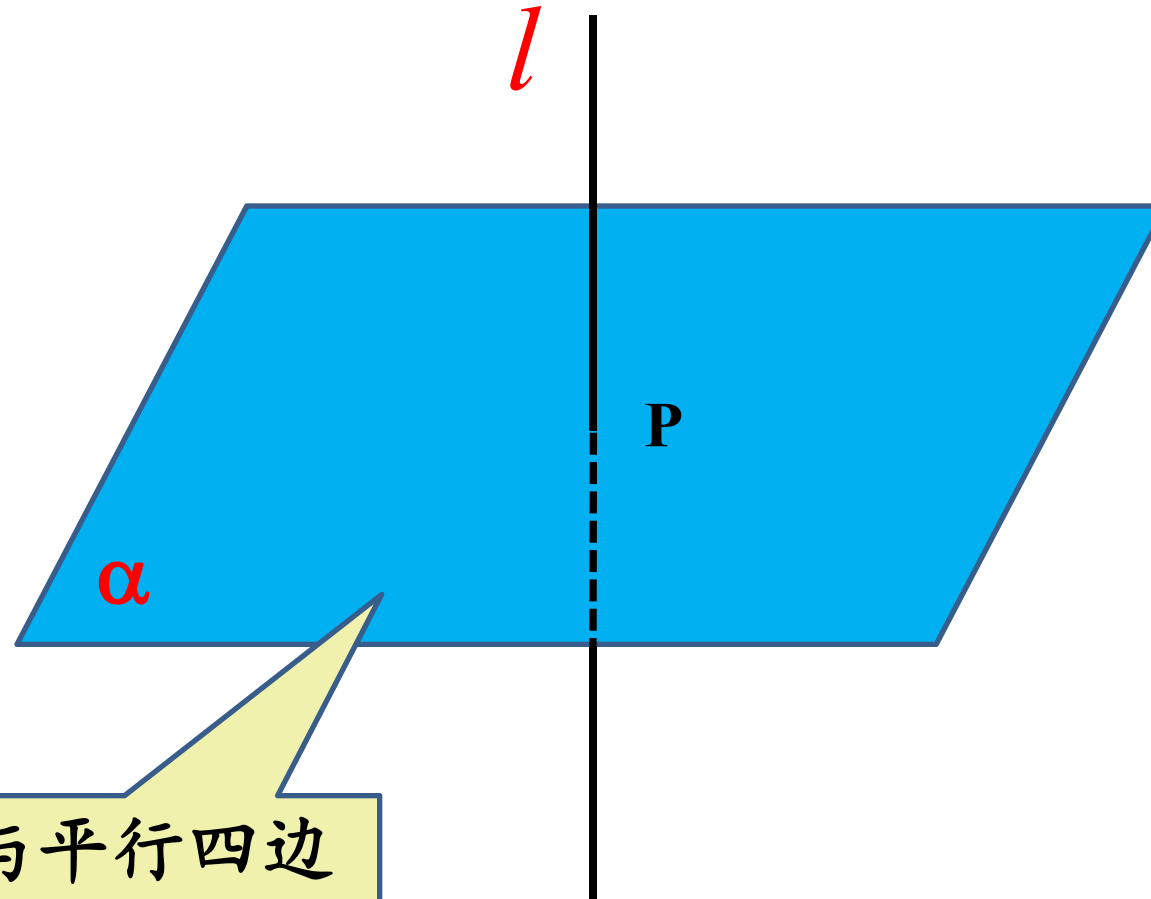
线面垂直 $\longrightarrow$ 线线垂直

线面垂直的定义常这样使用



简记：若线面垂直，则线线垂直

直线和平面垂直的画法：



直线与平行四边
形的一边垂直

 微思考

在空间中，过一点垂直于已知平面的直线有几条？为什么？

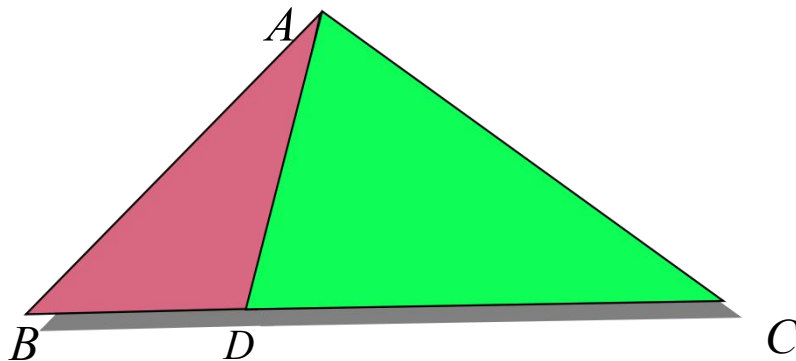
过一点垂直于已知平面的直线有且只有一条。

点面距离：

过一点作垂直于已知平面的直线，则该点与垂足间的线段，叫做这个点到该平面的垂线段，垂线段的长度叫做这个点到该平面的距离。

探究

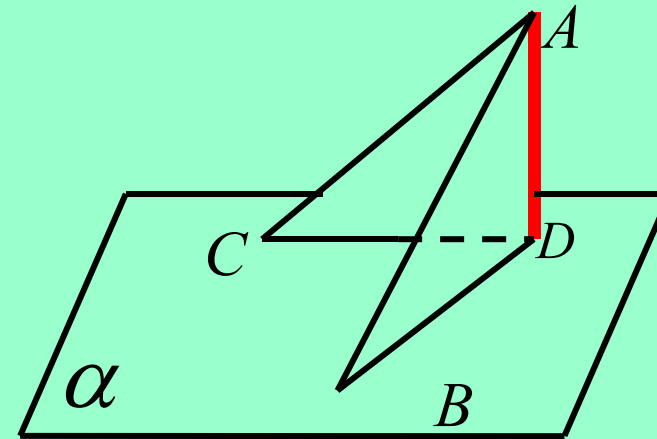
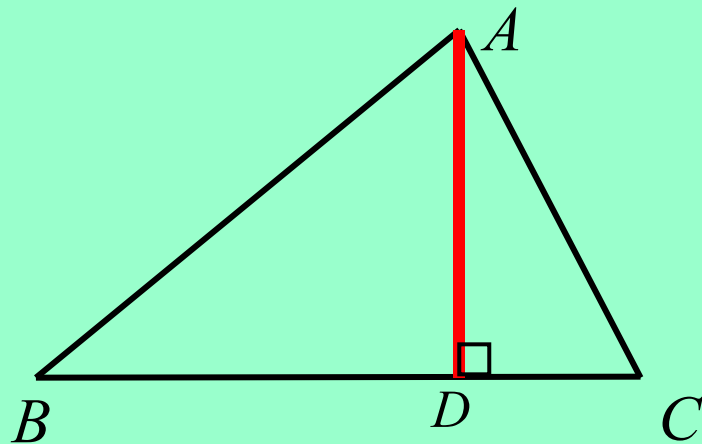
如图，准备一块三角形的硬纸片，做一个试验：



过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 翻折纸片，得到折痕 AD ，将翻折后的纸片竖起放置在桌面上（ BD 、 DC 与桌面接触）。

问题：（1）折痕 AD 与桌面垂直吗？

（2）如何翻折才能使折痕 AD 与桌面所在平面垂直？



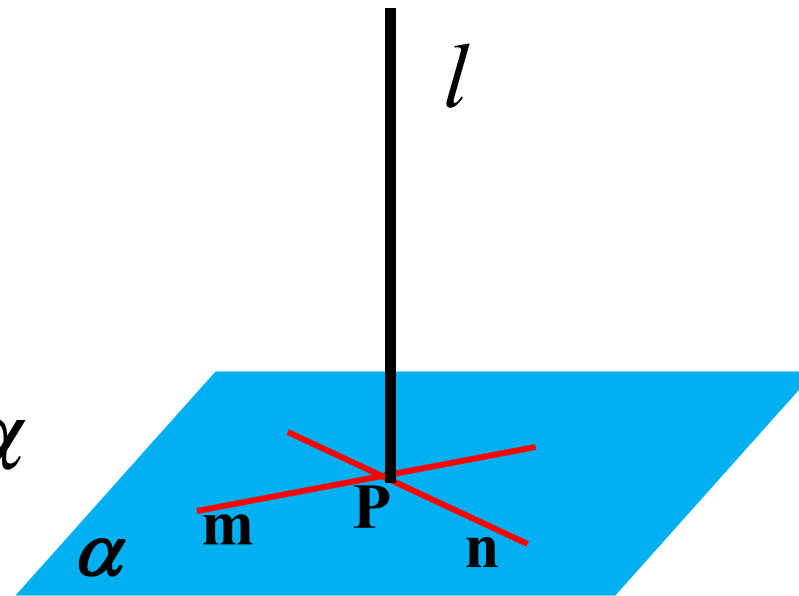
当且仅当折痕 AD 是 BC 边上的高时, AD 所在直线与桌面所在平面 α 垂直.

2. 线面垂直的判定定理

一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直。

符号语言

$$\left. \begin{array}{l} m \subset \alpha \\ n \subset \alpha \\ m \cap n = p \\ l \perp m \\ l \perp n \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$$



线线垂直 $\Rightarrow$ 线面垂直

问题1：和直线与平面垂直的定义相比，在证明直线和平面垂直方面，你觉得判定定理的优越性体现在哪里？

无限  有限

线不在多，相交就行

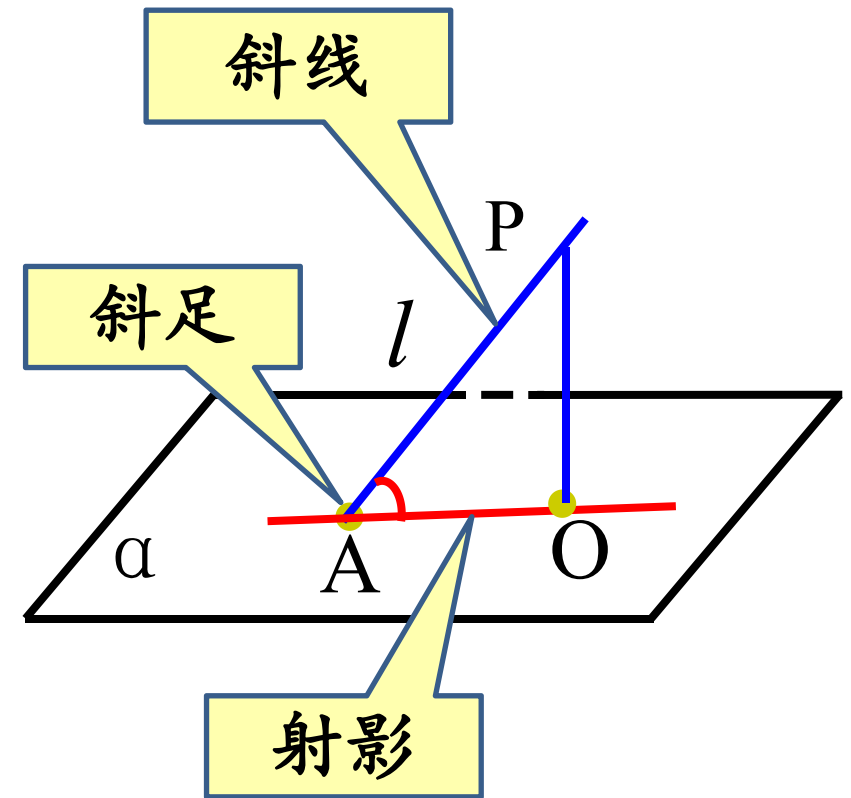
问题2：你觉得定义与判定定理的共同特点是什么？

线线垂直  线面垂直

3. 直线与平面所成角

- 1) 斜线(如图直线 l):和平面相交, 但不垂直的直线叫做平面的斜线
- 2) 斜足(如图点 A):斜线和平面相交的交点
- 3) 斜线在平面内的射影(如图直线 AO):

过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线, 过垂足和斜足的直线称为斜线在平面内的射影.



3. 直线与平面所成角

定义：平面的**斜线**和它在平面内的**射影**所成的**角**，叫做**直线和平面所成的角**。

规定：①若直线**垂直**平面，则直线和平面所成的角为 90°

符号表示：若 $l \perp \alpha$ ，则 $\theta = 90^\circ$

②若直线与平面**平行**或**在平面内**，则直线和平面所成的角为 0°

符号表示：若 $l \subset \alpha$ 或 $l \parallel \alpha$ ，则 $\theta = 0^\circ$

☆直线和平面所成角的取值范围为 $[0^\circ, 90^\circ]$

题型一 直线与平面垂直的判定(证明)

例1 (1) 求证：如果两条平行直线中的一条直线垂直于一个平面，那么另一条直线也垂直于这个平面。

已知： $a // b$, $a \perp \alpha$. 求证： $b \perp \alpha$

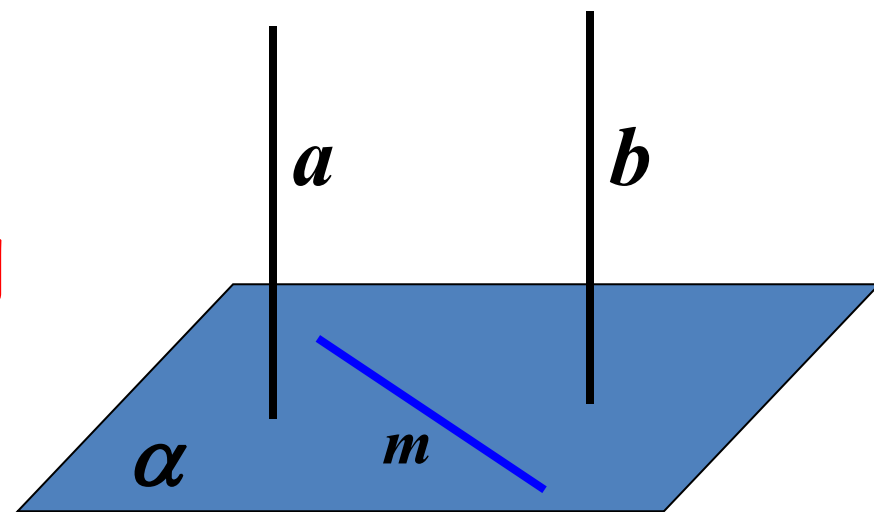
【证明】 设 m 是 α 内的任意一条直线

可作定理使用

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ m \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp m$$

$$\left. \begin{array}{l} a // b \\ m \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp m$$

$$\left. \begin{array}{l} b \perp m \\ m \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$$



例1 (2) 如图所示, $AB \perp BC$, $\triangle ABC$ 所在平面外有一点 S , 且 $SA=SB=SC$, AC 中点为 D .求证: $SD \perp$ 平面 ABC .

【证明】 因为 $SA=SC$, D 为 AC 中点, 所以 $SD \perp AC$.

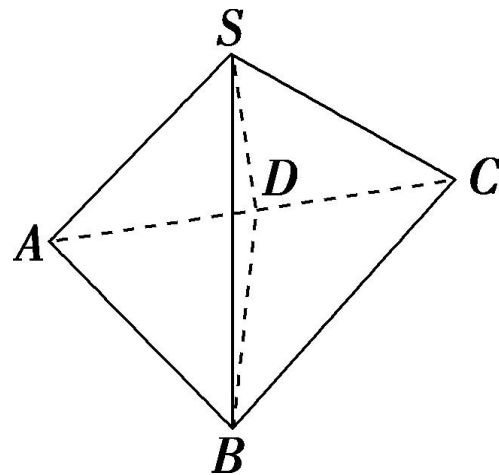
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AD=DC=BD$,

又 $SA=SB$, 所以 $\triangle SDA \cong \triangle SDB$.

所以 $\angle SDA = \angle SDB$, 即 $SD \perp DB$.

又 $AC \cap BD = D$, $AC \subset$ 平面 ABC , $BD \subset$ 平面 ABC ,

所以 $SD \perp$ 平面 ABC .

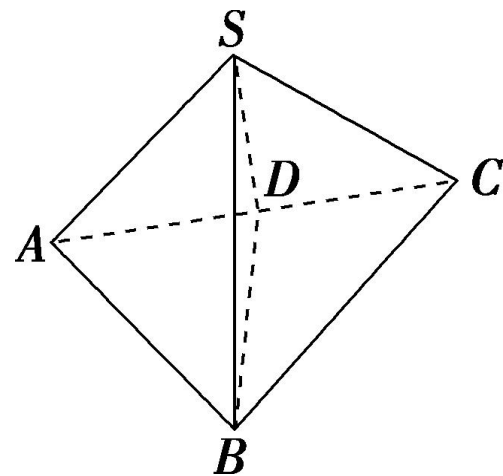


延伸探究

(变条件、变设问) 在本例条件下, 若 $AB=BC$, 求证: $BD \perp$ 平面 SAC .

【证明】 因为 $BA=BC$, D 为 AC 中点,
所以 $BD \perp AC$.

因为 $SD \perp$ 平面 ABC , $BD \subset$ 平面 ABC , 所以 $BD \perp SD$,
因为 $AC \subset$ 平面 SAC , $SD \subset$ 平面 SAC , $AC \cap SD = D$,
所以 $BD \perp$ 平面 SAC .

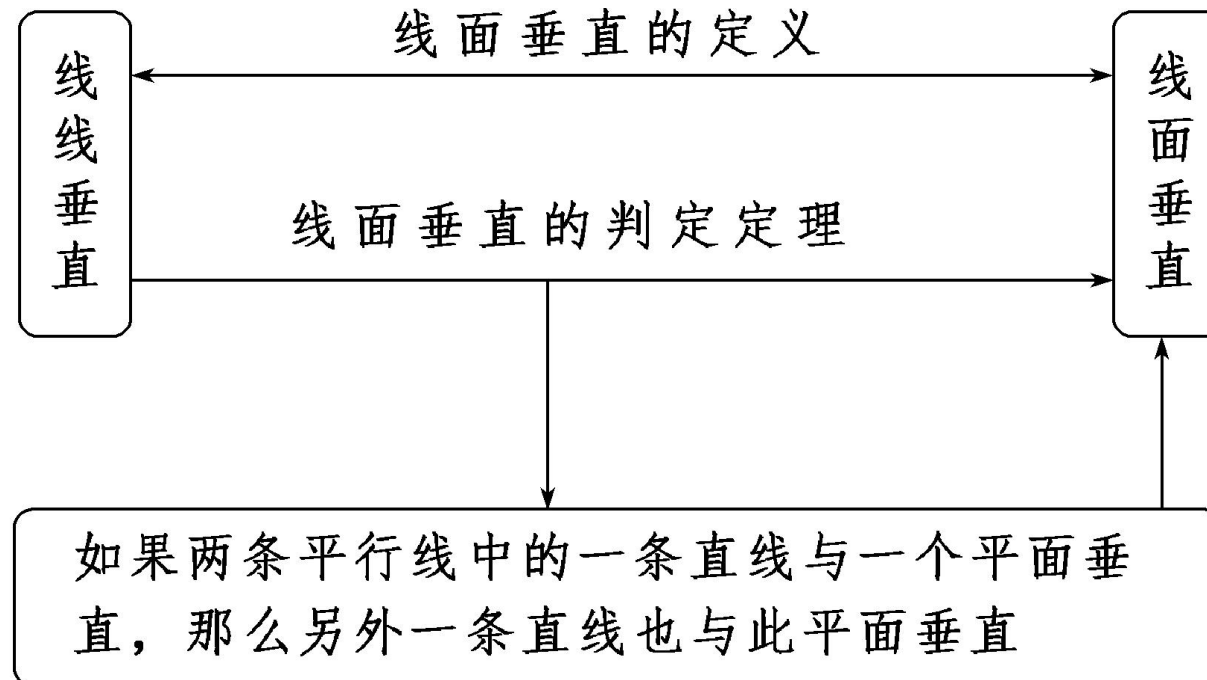


规律方法

(1) 证明线面垂直的方法

- ① 线面垂直的定义.
- ② 线面垂直的判定定理.
- ③ 如果两条平行直线中的一条直线垂直于一个平面, 那么另一条直线也垂直于这个平面.

(2) 线线垂直和线面垂直的相互转化



课堂练习一：

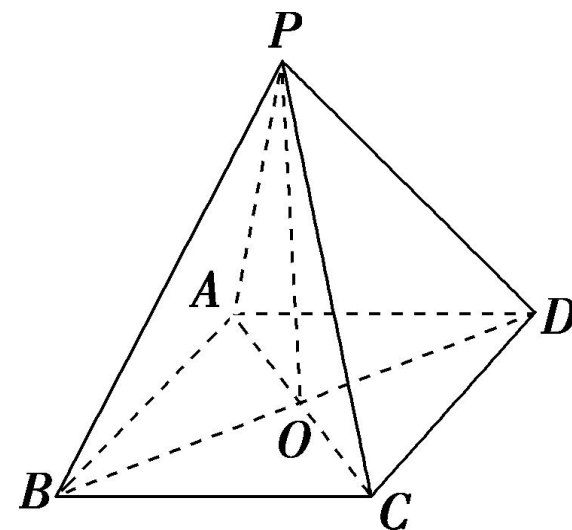
1. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是菱形，且 $PA=PC$ ， $PB=PD$.若 O 是 AC 与 BD 的交点. 求证： $PO \perp$ 平面 $ABCD$.

【证明】在 $\triangle PBD$ 中， $PB=PD$ ， O 为 BD 的中点，所以 $PO \perp BD$.

在 $\triangle PAC$ 中， $PA=PC$ ， O 为 AC 的中点，

所以 $PO \perp AC$.

又因为 $AC \cap BD = O$ ，所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$.



2. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, PA 垂直于 $\odot O$ 所在的平面, M 为圆周上任意一点, $AN \perp PM$, N 为垂足. 求证: $AN \perp$ 平面 PBM .

【证明】因为 AB 为 $\odot O$ 的直径,

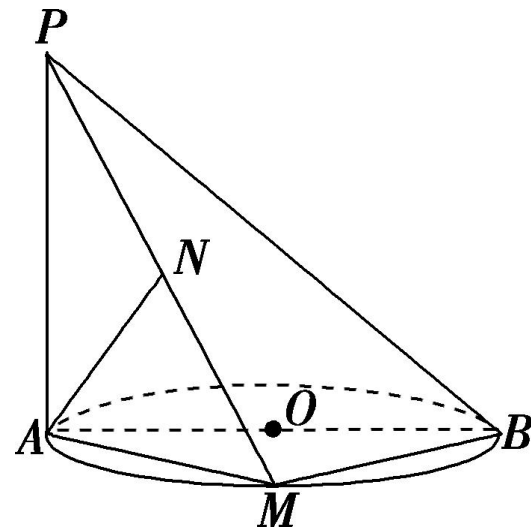
所以 $AM \perp BM$. 又 $PA \perp$ 平面 ABM , 所以 $PA \perp BM$.

又因为 $PA \cap AM = A$, 所以 $BM \perp$ 平面 PAM .

又 $AN \subset$ 平面 PAM , 所以 $BM \perp AN$.

又 $AN \perp PM$, 且 $BM \cap PM = M$,

所以 $AN \perp$ 平面 PBM .



题型二 直线与平面所成的角

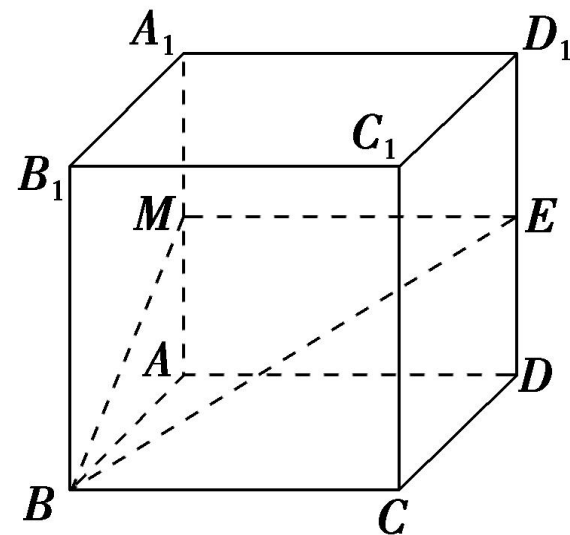
例2 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是棱 DD_1 的中点，求直线 BE 与平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值.

【解析】 取 AA_1 的中点 M ，连接 EM ， BM .

因为 E 是 DD_1 的中点，四边形 ADD_1A_1 为正方形，所以 $EM \parallel AD$.

又在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，所以 $EM \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，从而 BM 为直线 BE 在平面 ABB_1A_1 内的射影，

$\angle EBM$ 即为直线 BE 与平面 ABB_1A_1 所成的角.

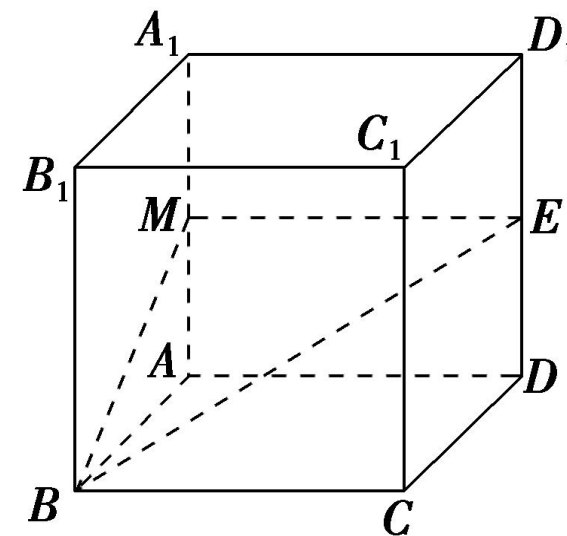


例2 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是棱 DD_1 的中点，求直线 BE 与平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值.

(接上) 设正方体的棱长为 2,
则 $EM=AD=2$, $BE= \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$.

于是在 $\text{Rt}\triangle BEM$ 中, $\sin \angle EBM = \frac{EM}{BE} = \frac{2}{3}$,

即直线 BE 与平面 ABB_1A_1 所成的角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.



规律方法

求直线与平面所成的角的步骤

作图

作（或找）出斜线在平面上的射影，将空间角转化为平面角，过斜线上斜足以外的一点作平面的垂线，再过垂足和斜足作直线，注意斜线上点的选取以及垂足的位置要与问题中已知量有关，才能便于计算

定角

证明某平面角就是斜线与平面所成的角

计算

通常在垂线段、斜线和射影所组成的直角三角形中计算

归纳小结

1. 直线与平面垂直的概念
2. 线面角的概念及范围 范围： $[0^\circ, 90^\circ]$
3. 直线与平面垂直的判定
 - (1) 利用定义；垂直于平面内任意一条直线
 - (2) 利用判定定理.

线线垂直 $\longrightarrow$ 线面垂直

4. 数学思想方法：转化的思想

空间问题 $\longrightarrow$ 平面问题

课后作业:

课本152页练习1、2、3、4
配套资料课时作业31



感谢观看

